〔1〕 (45点)

地球の周辺を運動する人工衛星を考える。人工衛星は質量 m の質点とみなせ，人工衛星が地球各部から受ける万有引力の合力は，地球の全質量が地球中心Oに集中しているときの万有引力に等しいものとみなせる。なお，地球の質量を M，半径を R とし，万有引力定数を G とする。

問 1. 図1のように，赤道上空を地球の自転と同じ向きに，地球中心Oから半径 r の円軌道上を一定の速さ v で周回運動をしている人工衛星を考える。以下では，赤道面に地球中心Oを原点とする2次元 xy 座標系をとり，人工衛星の位置は (x, y) と表すものとする。以下の問いに答えよ。

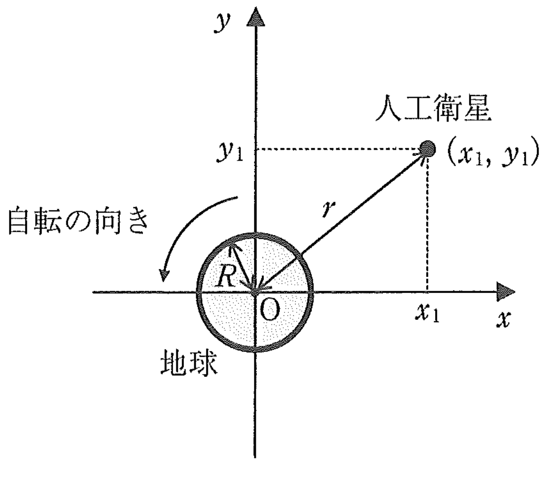

図1

(1) 図1のように人工衛星が位置 (x_1, y_1) にあるとき，人工衛星が受ける万有引力の x 成分 F_x，y 成分 F_y の大きさを，それぞれ G，M，m，r，x_1，y_1 のうち必要なものを用いて表せ。

(2) 図2に示すように，人工衛星が位置$(r, 0)$にあるときの速度を$\vec{v}_1$，それから時間Δtの間に角度$\Delta\theta$ [rad] だけ回転したときの速度を$\vec{v}_2$とする。$\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})$，$\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y})$とするとき，これら2つの位置での速度の各成分を$v$，$r$，$\Delta t$のうち必要なものを用いて表せ。

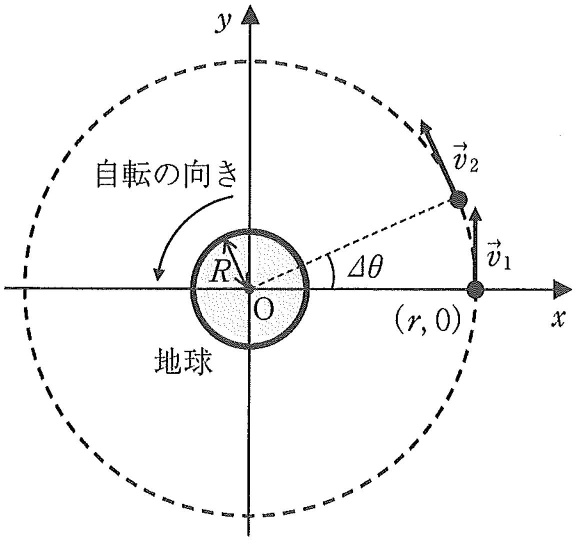

図2

(3) 前問(2)の時間Δtの間の速度変化を考える。速度変化のx成分Δv_x，およびy成分Δv_yをv，r，Δtのうち必要なものを用いて表せ。

(4) 前問(3)の結果を用い，人工衛星が位置$(r, 0)$にあるときの加速度のx成分a_x，およびy成分a_yをv，r，Δtのうち必要なものを用いて表せ。ここでは，時間Δtは微小であり，その間の角度変化$\Delta\theta$は十分に小さいものとして，微小な角度$\Delta\theta$に対して成立する近似式($\sin\Delta\theta \fallingdotseq \Delta\theta$, $\cos\Delta\theta \fallingdotseq 1$)を用いること。

(5) この人工衛星を地上から見たところ静止して見えた。地球の自転の周期をTとするとき，人工衛星の軌道半径rをG，M，Tを用いて表せ。

問 2. 次に，地球中心Oを一つの焦点として楕円運動する人工衛星を考える。「惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積（面積速度）は一定である」とするケプラーの第二法則が，地球中心Oを焦点とする人工衛星の楕円運動でも成り立つものとする。図3のように，この人工衛星の速度を $\vec{v}$，その大きさを v とする。また，地球中心Oから人工衛星へ向かうベクトルを $\vec{r}$ とし，その大きさを r とする。速度 $\vec{v}$ の $\vec{r}$ と平行な成分の大きさを $v_{\parallel}$，$\vec{r}$ に垂直な成分の大きさを $v_{\perp}$ で表し，$\vec{r}$ と $\vec{v}$ のなす角度を φ $(0 < \varphi < \pi)$ とする。このとき，面積速度 h は $h = \dfrac{1}{2} rv\sin\varphi$ と与えられる。以下の問いに答えよ。

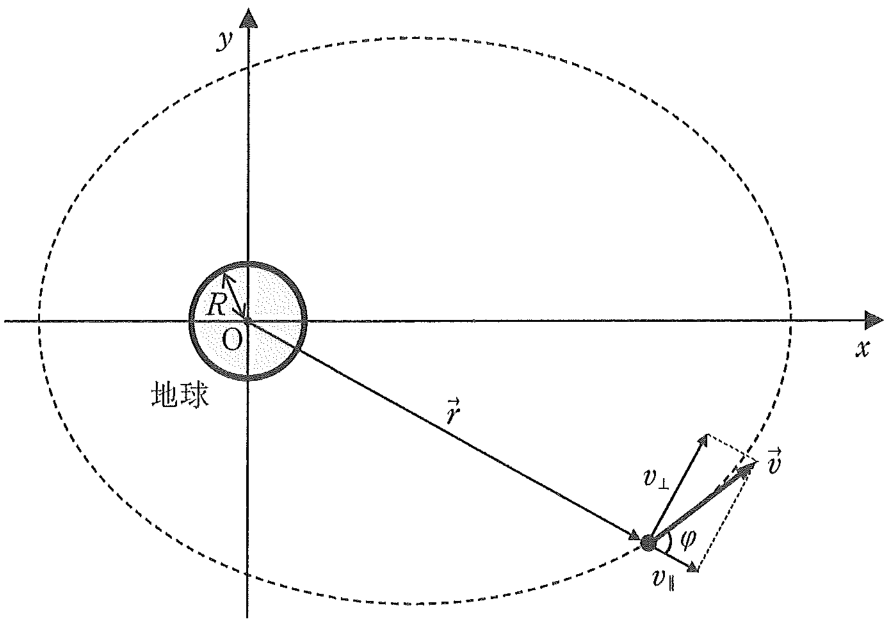

図3

(1) $v_{\perp}$ を r と h を用いて表せ。

(2) 人工衛星の万有引力による位置エネルギー U を G，M，m，r を用いて表せ。ただし，無限遠方の位置エネルギーを $U = 0$ とする。

(3) 人工衛星の力学的エネルギー E を $v_{\parallel}$，G，M，m，r，h を用いて表せ。

(4)　前問(3)で求めた力学的エネルギーの表式のうち，r を含む項をすべて合わせたもの（$v_{\parallel}$ の項を含まないもの）を $V(r)$ とする。地球は全質量が地球中心Oに集中している質点とし，大きさは無視できるものとする。r を 0 から大きくしたとき，最初に $V(r)=0$ になる距離 r_c を求めよ。また，$V(r)$ を r の関数としてグラフに図示せよ。このとき，r が 0 に近づく際および無限遠方に向かう際のグラフの様子がわかるように示せ（極値および変曲点まで求める必要はない）。

問 3. 図4に示すように，人工衛星を地表面から水平に大きさ v_0 の初速度で発射した。このとき，地球の自転速度および空気抵抗の影響は無視できるものとする。以下の問いに答えよ。

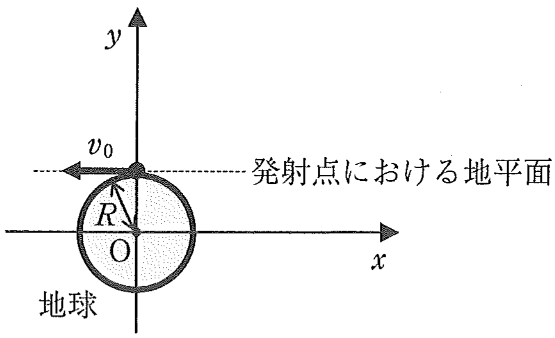

図4

(1)　発射した瞬間の人工衛星の力学的エネルギー E_0 を R, G, M, m, v_0 を用いて表せ。

(2)　人工衛星が無限遠方に飛んでいくために必要な最小の初速度の大きさ $v_{\min}$ を求めよ。

〔2〕 (40点)

コイルを流れる電流に関して，以下の問いに答えよ。

問 1. 図1(i)のように，1辺の長さが$2a$の正方形の形をしたコイル$C_1C_2C_3C_4$を，$z=0$の平面内でコイルの中心が原点Oと一致し，C_2C_3とC_4C_1がx軸と平行になるように置いた。空間にはz軸の正の向きに磁束密度の大きさBの一様な磁場がかかっている。コイルは，図1(ii)のように，y軸まわりでのみ回転することができ，$z=0$の平面からの回転角をθ [rad] とする。回転角θの符号は，y軸負の側から見て時計回りを正とする。

コイルはC_4C_1の中点で，起電力Eの電池と抵抗値Rの抵抗からなる起電力回路部に導線で接続されている。この導線の間隔は十分短く，起電力回路部はコイルから十分に離れているものとする。コイルの導線，および起電力回路部へと接続する導線は十分細いが，電気抵抗は無視できるものとする。また，コイルは変形せず，コイルと起電力回路部を接続する導線のねじれの影響は考えなくてよい。

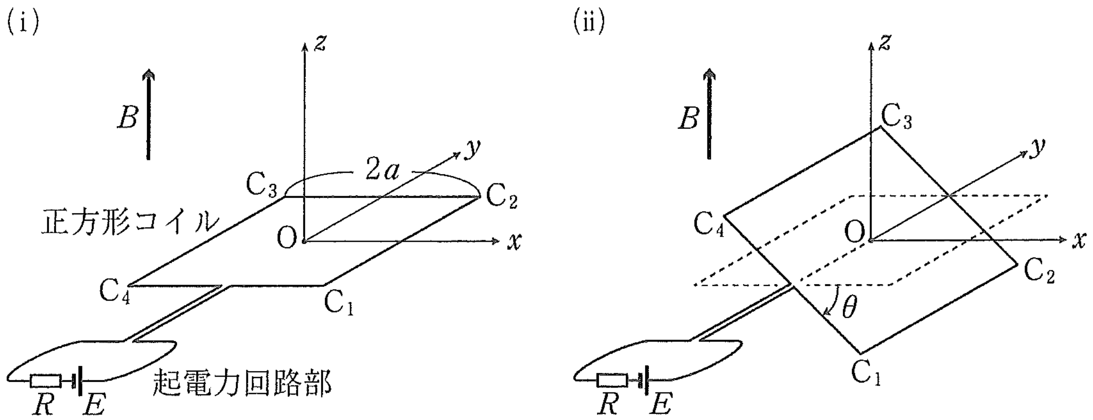

図1

(1) コイルが静止しているとき，コイルを流れる電流の大きさ I_0 を E, R, a, B のうち必要なものを用いて表せ。

(2) コイルを回転角 θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ で静止させた。このとき，コイルの4辺が磁場から受ける力の向きを示した図として最もふさわしいものを，図2の(a)〜(h)の中から選択して答えよ。

(3) コイルを任意の回転角 θ で静止させた。このとき，コイルの4辺が磁場から受ける y 軸まわりの力のモーメントの和 $N(\theta)$ を E, R, a, B, θ のうち必要なものを用いて表せ。ただし，$N(\theta)$ の符号は，θ と同じ回転の向きを正とする。

(4) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ の範囲において $N(\theta) = 0$ となる2つの回転角 θ_1 と θ_2 を答えよ。ただし，$\theta_1 < \theta_2$ とする。

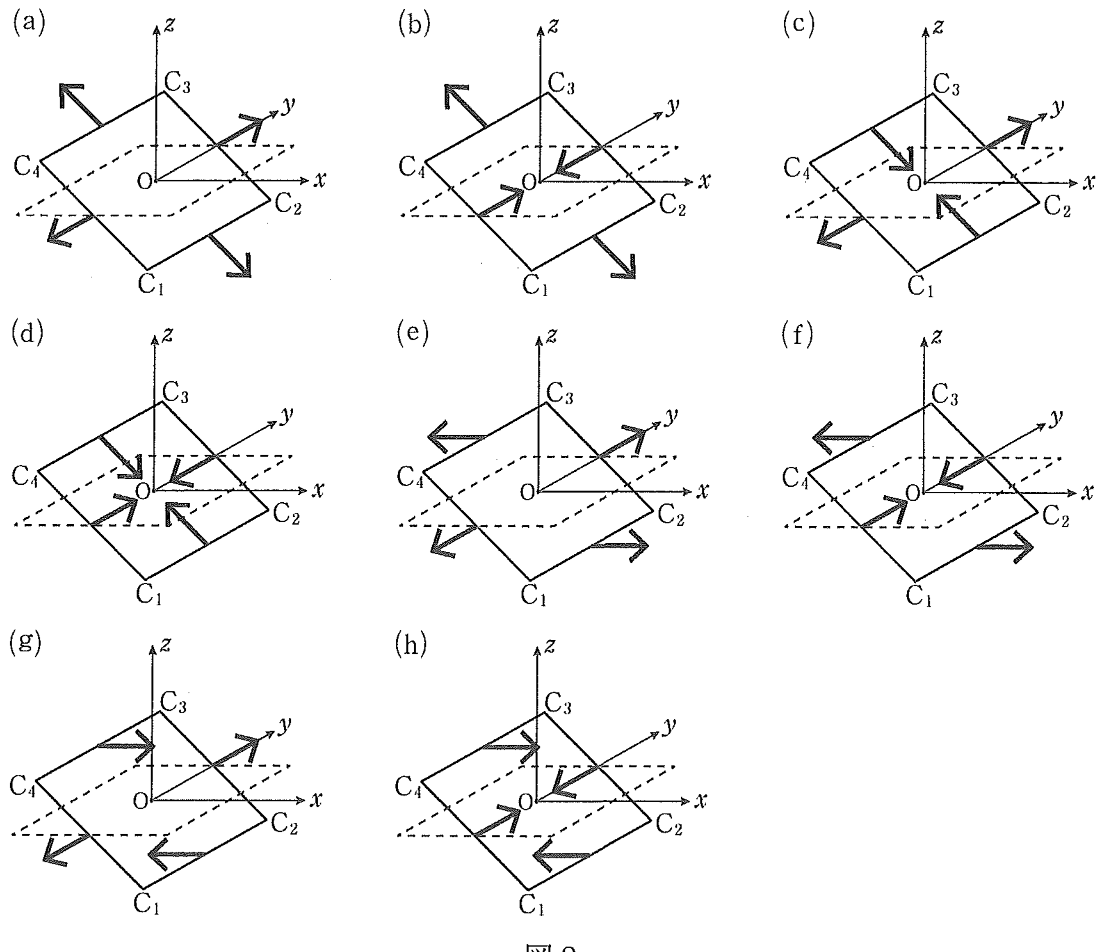

図2

問 2. コイルの回転角θが問 1 (4)で求めたθ_1のときを状態 1，θ_2のときを状態 2 とする。状態 1 と状態 2 について，志賀さんと能古さんは次のように議論した。ただし，空欄(ア)〜(オ)には中点（・）で区切られたいずれかの言葉や数字が入る。

志賀さん 「状態 1 と状態 2 はどちらも磁場から受ける力のモーメントの和が$N(\theta)=0$だけれど，何か違いがあるのかな？」

能古さん 「コイルに外から力のモーメントを加えて，$N(\theta)$とのつり合いを保ちながら，状態 1 から状態 2 まで十分にゆっくりと回転させたときにする仕事W_0を考えてみよう。」

志賀さん 「コイルをある回転角θから微小角度$\Delta\theta$だけ十分にゆっくりと回転させるとき，外から加えた力のモーメントがコイルにする仕事ΔWは$\Delta W = -N(\theta)\Delta\theta$と書けるよ。」

能古さん 「ΔWと$\Delta\theta$は，$\theta_1 < \theta < \theta_2$の範囲では常に (ア) 同・異 符号の関係にあって，このΔWをθ_1からθ_2まで足し合わせるとW_0になるんだね。それ以外の$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta < \theta_1$と$\theta_2 < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$の範囲では，$\Delta W$と$\Delta\theta$は常に (イ) 同・異 符号の関係にあるね。」

志賀さん 「すると，状態 1 からθを変化させるとき，コイルにする仕事の符号は必ず (ウ) 正・負 で，状態 2 からθを変化させるときは，コイルにする仕事の符号は必ず (エ) 正・負 になるね。」

能古さん 「だから，どちらの状態でも$N(\theta)=0$だけれど，コイルの回転角θが少し変化しても元に戻ろうとする『安定』な状態なのは状態 (オ) 1・2 の方なんだね。」

(1) 空欄(ア)，(イ)に当てはまる言葉の組み合わせとして正しいものを次の①〜④の中から選択し答えよ。

① (ア) 同　(イ) 同　　② (ア) 同　(イ) 異

③ (ア) 異　(イ) 同　　④ (ア) 異　(イ) 異

(2)　空欄(ウ), (エ)に当てはまる言葉の組み合わせとして正しいものを次の①～④の中から選択し答えよ。

① (ウ) 正　(エ) 正　　② (ウ) 正　(エ) 負

③ (ウ) 負　(エ) 正　　④ (ウ) 負　(エ) 負

(3)　空欄(オ)に当てはまる数字を「1」,「2」から選択し答えよ。

志賀さんと能古さんの議論を，外から力のモーメントを加えて一定の角速度ω ($\omega > 0$) でコイルを回転させたときと比較しよう。コイルの回転角がθ_1になった時刻を$t = 0$とする。ただし，コイルを流れる電流が作る磁束密度の大きさはBよりも十分小さいものとする。

(4)　時刻tにおけるコイルを貫く磁束を$\Phi(t)$とする。$\Phi(t)$の符号は，コイルの$C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow C_4$の向きに右ねじを回したときにねじが進む向きを正とする。時刻tから短い時間Δtの間にθは$\Delta\theta = \omega\Delta t$だけ変化し，このときの$\Phi(t)$の変化を$\Delta\Phi(t)$とする。時刻$t$における$\dfrac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t}$を$E$, R, a, B, ω, tのうち必要なものを用いて表せ。ただし，三角関数の公式 $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ を使い，微小角度$\Delta\theta$に対しては，$\sin\Delta\theta \fallingdotseq \Delta\theta$, $\cos\Delta\theta \fallingdotseq 1$の近似を用いること。

(5)　時刻tにコイルを流れる電流$I(t)$をE, R, a, B, ω, tのうち必要なものを用いて表せ。ただし，$I(t)$の符号は，電流がコイルを$C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow C_4$の向きに流れるときを正とする。

(6)　コイルの回転角がθ_1から最初にθ_2になるまでに，外から加えた力のモーメントがコイルにした仕事をW'とする。このW'と，志賀さんと能古さんが議論したW_0の大小関係として適切なものを解答欄から選択せよ。また，その理由を80字以内で述べよ。ただし，句読点も1字として数える。

〔 3 〕 (40 点)

問 1. 凸レンズ(虫眼鏡)を物体に近づけたとき，物体が拡大されて見えることについて考えよう。図1のように，点FおよびF′を焦点とする焦点距離fの凸レンズと長さhの物体がある。物体は，凸レンズの中心Oから前方(左側)へ距離a $(a < f)$だけ離れた位置に，凸レンズと平行に置かれており，その下端は凸レンズの光軸上にある。以下の問いに答えよ。

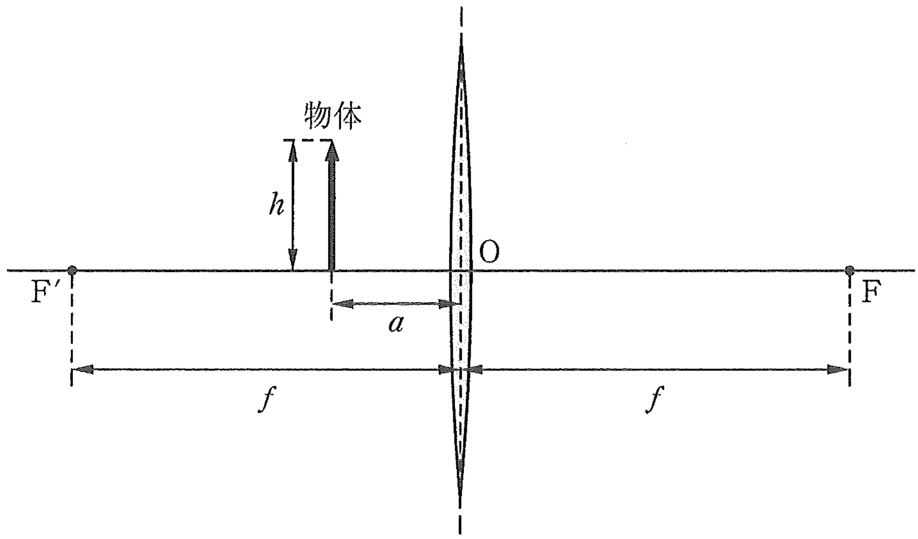

図1

(1) $a = \dfrac{f}{3}$ の場合を考え，凸レンズの後方(右側)から見た物体の虚像を解答欄に作図せよ。

(2) $0 < a < f$を満たす任意のaに対して，虚像の長さh'とhの比$\dfrac{h'}{h}$を求めよ。

問 2. 次に凸レンズにおいて，光がどのように屈折および反射するのかを見てみよう。簡単な模型として，図2のような，点Cを中心とする半径rの球面と平面からなる平凸レンズを考える。点Cを通り平面に垂直な平凸レンズの光軸をx軸とし，x軸と球面の交点を原点Oとする。平凸レンズは平面側がx軸の負の向き（前方）になるように置く。平凸レンズの屈折率を$n\,(n > 1)$とし，周囲の空気の屈折率は1とする。以下に考えるすべての光線は単色光で，xy平面内を進むものとする。以下の問いに答えよ。

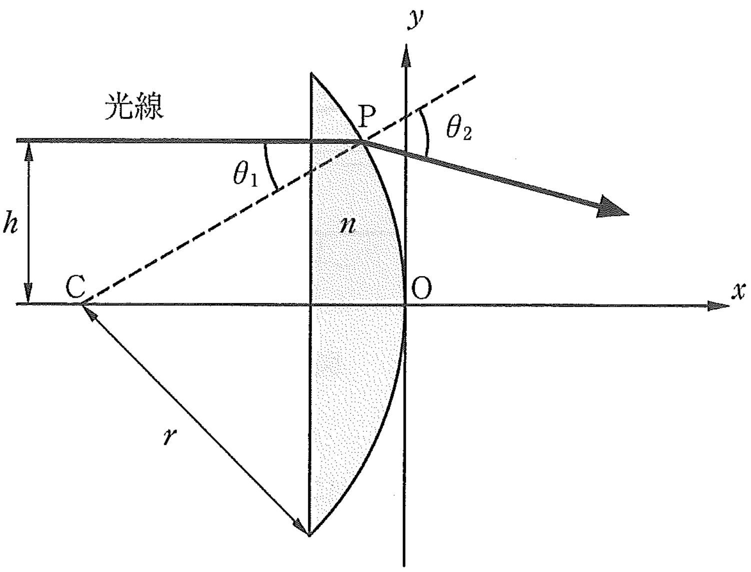

図2

平凸レンズの前方（左側）から，$y = h\,(h > 0)$の線に沿った光線を平凸レンズの平面に垂直に入射させる。光線は球面上の点Pに到達する。なお点Pにおける光の屈折や反射を考える際，平凸レンズの表面は点Pのごく近傍では平面であると考えてよい。

(1) 点Pにおける入射角をθ_1[rad]としたとき，$\sin\theta_1$をh，rおよびnのうち必要なものを用いて表せ。

(2) 点Pにおける屈折角をθ_2[rad]としたとき，$\sin\theta_2$をθ_1およびnを用いて表せ。

(3) θ_1がある条件を満たすとき，光線は点Pにおいて全反射する。全反射するかしないかの境界となる条件は$\theta_1 = \theta_c$である。θ_cとnの間の関係式を示せ。また，θ_1がθ_cより①大きいとき，②小さいときのどちらの条件で全反射が起こるかを選び，番号で答えよ。

次に，図3のようにhがrに比べて十分小さい場合を考える。このとき，θ_1およびθ_2は小さく，$\sin\theta_1 \fallingdotseq \theta_1$および$\sin\theta_2 \fallingdotseq \theta_2$の近似が成り立つとする。

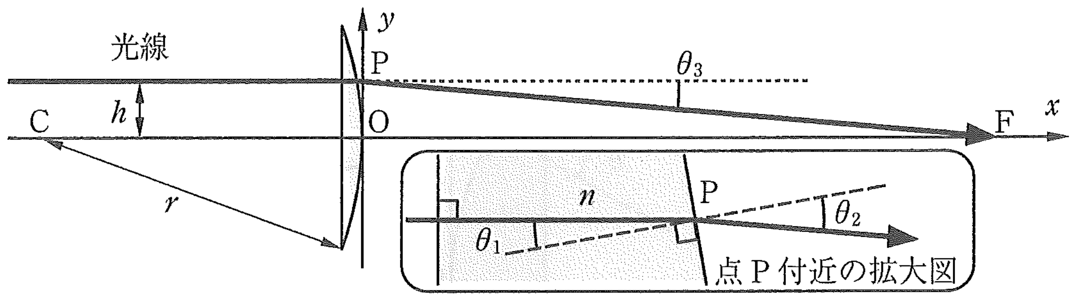

図3

(4) 平凸レンズを出て後方(右側)に進む光線と光軸のなす角θ_3[rad]をr，h，およびnを用いて表せ。

(5) 平凸レンズ通過後の光線は，hの値によらず焦点Fを通過すると考えてよい。hがrに比べて十分小さいので，点Pの座標を$(x,\ y) = (0,\ h)$と近似し，OF間の距離(焦点距離)fをrおよびnを用いて表せ。なお，θ_3は小さく，$\tan\theta_3 \fallingdotseq \theta_3$の近似が成り立つとする。

次に，図3のような平凸レンズを屈折率$n'$$(1 < n' < n)$の液体中に置いた。

(6) 液体中での平凸レンズの焦点距離f'をr，nおよびn'を用いて表せ。またf'とfの間の正しい関係式を以下から1つ選び，番号で答えよ。

① $f' < f$　　② $f' = f$　　③ $f' > f$

問 3. カメラ等に用いられるレンズの表面には，反射を抑えるため，コーティングと呼ばれる透明な薄膜が塗布されることがある。その模型として，図 4 のように，屈折率 1 の空気と屈折率 $n\,(n > 1)$ のガラスの間に挟まれた厚さ d，屈折率 $n_2\,(n_2 > 1)$ の薄膜を考えよう。空気側（左側）から波長 λ の単色光を，薄膜表面に垂直に入射させ，反射光を観測した。以下の問いに答えよ。

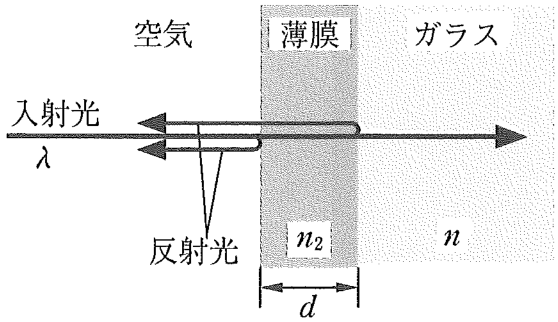

図 4

(1) 光が薄膜とガラスの境界で反射するときの位相のずれを (a) $n_2 < n$ および (b) $n_2 > n$ の場合にわけて答えよ。

(2) 薄膜の両面で反射した光が弱め合う条件を (a) $n_2 < n$ および (b) $n_2 > n$ の場合にわけて，d，λ，n，n_2 の中から必要なもの，および整数 $m = 0$，1，2，… を用いて表せ。ただし，$d = 0$ の場合は条件から除外せよ。