

## 2020 大阪大学第 1 問

図1のような、斜面と半径  $R$  の円周、および水平な面からなるトラック (運動の経路) がある。このトラック上の小物体 (質量  $m$  とする) の一連の運動を考えよう。点 A から円周を經由して点 E までトラックは滑らかであり、摩擦は無視できる。点 E から右側の水平面上では摩擦力が働き、小物体と水平面との動摩擦係数を  $\mu$  とする。重力加速度を  $g$  とし、空気抵抗は無視できるとする。

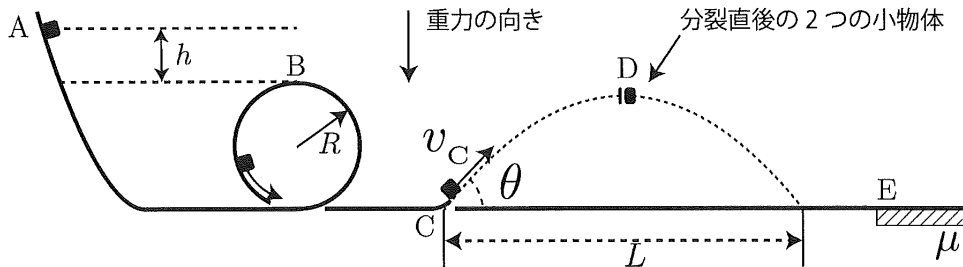


図 1

- I. 小物体を点 A から静かに放したところ、小物体はトラックに沿って運動し、円周内側から離れずに点 B を通過して、点 C まで運動した。点 B は円周の最高点であり、点 A との高さの差を  $h$  ( $h > 0$ ) とする。

問 1 点 B での小物体の速度の大きさ  $v_B$  を  $g, h$  を用いて表せ。

問 2 小物体が円周から離れることなく円周に沿って運動するために必要な  $h$  の最小値  $h_0$  を  $R$  を用いて表せ。

- II. 図1のように、小物体は点 C で滑らかに運動の向きを変え、速度の大きさ  $v_C$ 、角度  $\theta$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ) で飛び出した。図1の点 C からの点線は、小物体がこのまま運動をつづけた場合の軌跡であり、この軌跡が水平面と再び交わる点の点 C からの距離を  $L$  とする。

小物体が最高点 D に達したとき、内部に仕込まれていたバネによって、小物体は突然 2 つの小物体に瞬時に分裂した。分裂後の小物体の質量は、それぞれ  $\frac{1}{4}m$  と  $\frac{3}{4}m$  であった。以後、軽い小物体、重い小物体と呼ぶ。軽い小物体の速度は分裂直後に 0 になった。また、分裂前にバネは圧縮されていて、このバネに蓄えられていた力学的エネルギーは、すべて、2 つの小物体の運動エネルギーに変換されたとする。バネの質量と長さは十分に小さく無視できる。

- 問 3 分裂後の 2 つの小物体が、それぞれ水平面に落下するまでの落下時間に関する以下の記述のうち、正しいものを (あ)~(お) から 1 つ選べ。

- (あ) 落下時間はどちらも等しい。
- (い) 軽い小物体の落下時間は、重い小物体の落下時間の 3 倍である。
- (う) 重い小物体の落下時間は、軽い小物体の落下時間の 3 倍である。
- (え) 軽い小物体の落下時間は、重い小物体の落下時間の  $\sqrt{3}$  倍である。
- (お) 重い小物体の落下時間は、軽い小物体の落下時間の  $\sqrt{3}$  倍である。

問 4 重い小物体の分裂直後の速度の大きさ  $v_D$  を  $v_C, \theta$  を用いて表せ。

問 5 軽い小物体が水平面に落下した点の、点 C からの距離を  $L$  を用いて表せ。

問 6 重い小物体が水平面に落下した点の、点 C からの距離を、 $L$  を用いて表せ。

**III.** 重い小物体が水平面に落下した直後、その速度の鉛直成分は0になり、速度の水平成分は落下直前の値を保った。その後、重い小物体は滑らかな水平面上を運動し、時刻  $t = 0$  に点 E を通過し、水平面から摩擦力を受けて減速し、時刻  $t = t_S$  に静止した。

問7 静止した時刻  $t_S$  を  $v_C, \theta, \mu, g$  を用いて表せ。

問8 時刻  $t (0 \leq t \leq t_S)$  における、重い小物体の点 E からの距離を  $x$  とする。時刻  $t$  を  $v_C, \theta, \mu, g, x$  を用いて表せ。

**IV.** 分裂してできた2つの小物体のうち、軽い小物体は水平面に落下後、水平面上で静止した。また重い小物体は **III.** に示したような運動をして静止した。

問9 点 A で静かに小物体を放したときから分裂後の2つの小物体が両方とも静止するまでに失われた、全ての力学的エネルギーの合計を  $m, g, h, R, \theta$  を用いて表せ。

## 2020 大阪大学第 2 問

コンデンサー、コイル、抵抗、ダイオード、スイッチ、起電力  $E$  の直流電源などからなる電気回路を考える。回路中の導線やスイッチの電気抵抗は十分に小さいとする。コンデンサーは平行平板コンデンサーであり、極板間は、最初、真空とする。

- I. 図 1 のような電気回路がある。コンデンサー 1、2、3 の静電容量を、それぞれ  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  とする。最初、コンデンサーの電荷は全て 0 で、スイッチは全て開いていた。

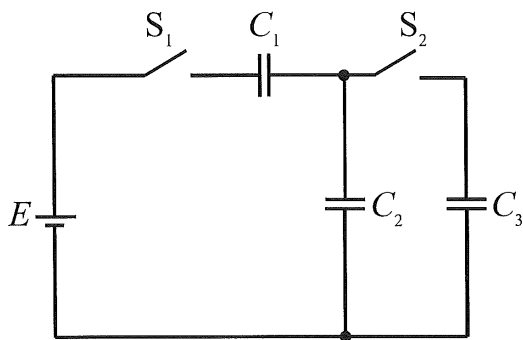


図 1

- 問 1 まず、スイッチ  $S_1$  を閉じた。十分に時間が経った後、コンデンサー 2 の極板間の電位差が  $V_1$  になった。 $V_1$  を  $E$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  を用いて表せ。
- 問 2 次に、スイッチ  $S_1$  を開いて、スイッチ  $S_2$  を閉じた。十分に時間が経った後、コンデンサー 2 の極板間の電位差が  $V_2$  になった。 $V_2$  を  $E$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  を用いて表せ。
- 問 3 その後、スイッチ  $S_2$  を閉じたままスイッチ  $S_1$  を閉じた。十分に時間が経った後、コンデンサー 2 の極板間の電位差が  $V_3$  になった。 $V_3$  を  $E$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  を用いて表せ。
- 問 4 この状態で、コンデンサー 3 の極板間を、比誘電率  $\epsilon_r$  の誘電体で満たした。十分に時間が経った後、コンデンサー 2 の極板間の電位差が、コンデンサー 1 の極板間の電位差の 2 倍になった。このときの比誘電率  $\epsilon_r$  を  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  を用いて表せ。

II. 次に、図2の電気回路について考える。コンデンサーの静電容量を  $C$ 、コイルの自己インダクタンスを  $L$ 、抵抗の抵抗値を  $R$  とする。ダイオード  $D$  は、順方向に電流が流れるとき電圧降下はなく抵抗は無視でき、逆方向には電流が流れないとする。最初にスイッチ  $S_4$  を開いたままスイッチ  $S_3$  を閉じ、十分に時間が経った後、スイッチ  $S_3$  を開き、その後スイッチ  $S_4$  を閉じた。

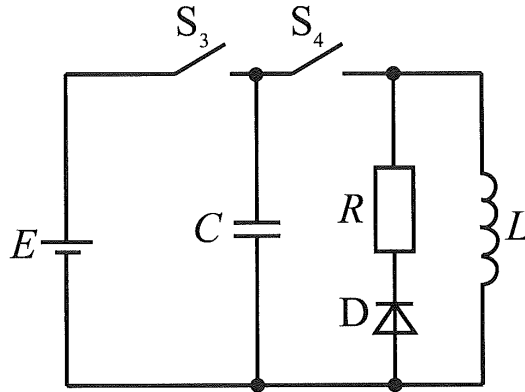


図2

- 問5 コイルに流れる電流は時間とともに変化した。電流の大きさの最大値  $I_0$  を  $E$ ,  $C$ ,  $L$  を用いて表せ。
- 問6 コイルは単位長さ当たりの巻き数が  $n$  のソレノイドであった。このソレノイドコイルの内部における磁場の大きさの最大値  $H_0$  を  $n$ ,  $I_0$  を用いて表せ。
- 問7 スイッチ  $S_4$  を閉じた時刻を  $t = 0$  とする。ダイオード  $D$  があるために、時刻  $t = 0$  の後で磁場の大きさが最大になるまでの間は、この電気回路はコンデンサーとコイルのみで構成されていると考えてよい。磁場の大きさが最大になる時刻  $t_0$  を  $L$ ,  $C$  を用いて表せ。
- 問8 コイルの電流の大きさが最大になった瞬間に、スイッチ  $S_4$  を開いた。この後は、ダイオード  $D$  があるために、電流は抵抗に流れた。時刻  $t_0$  の微小時間  $\Delta t$  後には、電流の大きさが  $I_0$  から  $I_0 + \Delta I$  に変化した。 $\frac{\Delta I}{I_0 \Delta t}$  を  $L$  と  $R$  で表せ。
- 問9 時刻  $t_0$  ( $t \leq t_0$ ) までとその後  $t > t_0$  の両方について、コイルに流れる電流の大きさの時間変化を表すものとして最も適切なグラフの概形を、図3中の(あ)~(う)と(え)~(か)からそれぞれ選べ。

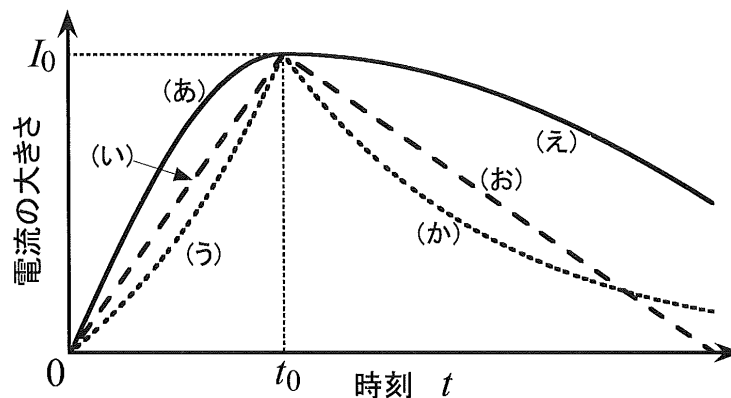


図3

## 2020 大阪大学第3問

以下の **A** と **B** の両方の問題に解答せよ。なお **A** と **B** は独立した内容の問題である。

- A.** なめらかに上下に動くピストン (質量と厚みは無視できる) がついた円筒状の容器内に、単原子分子の理想気体が  $1 \text{ mol}$  封入されている (図1)。この容器とピストンは熱を伝えない。容器内に、気体に熱を加えたり気体から熱を奪ったりできる熱制御装置が組み込まれている。熱制御装置の体積は無視できるほど小さく、かつピストンの運動を邪魔しないとする。図1のように  $z$  軸を取り、 $z = 0$  を容器の底面とする。はじめにピストンは  $z = L$  の位置に静止しており、容器内の気体の圧力と温度は、それぞれ  $p_0, T_0$  であった (図2の状態 A)。容器外の気体の圧力は常に  $p_0$  で一定である。気体定数を  $R$  とする。また、単原子分子の理想気体の圧力を  $p$ 、体積を  $V$  としたとき、断熱変化においては、 $pV^\gamma$  は一定に保たれる。なお、 $\gamma$  は定数である。

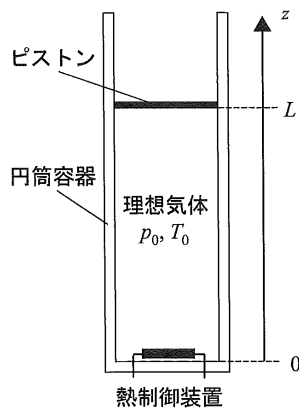


図1

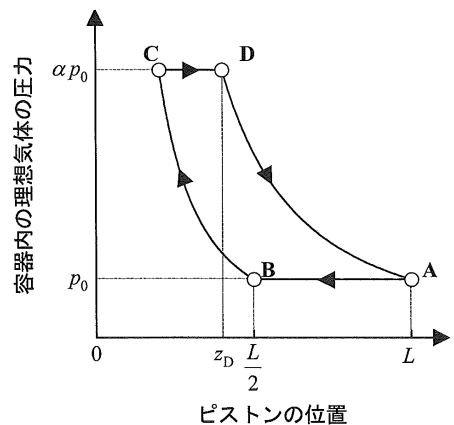


図2

- 問1 ピストンが自由に動く状態で熱制御装置をある時間作動させると、ピストンがゆっくり動いて  $z = \frac{L}{2}$  の位置で停止した (図2の状態 B)。状態 B における容器内の気体の温度  $T_B$  を  $T_0$  を用いて表せ。
- 問2 過程  $A \rightarrow B$  において、容器内の気体に加えられた熱量  $Q_1$  (気体が吸熱した場合を正、放熱した場合を負とする) を  $R, T_0$  を用いて表せ。
- 問3 次に状態 B からピストンに徐々に力を加え、容器内の気体の圧力が  $\alpha p_0$  ( $\alpha > 1$ ) になるまで、ゆっくりと断熱変化させた (図2の状態 C)。状態 C における容器内の気体の温度  $T_C$  を  $T_0, \alpha, \gamma$  を用いて表せ。

状態 C から、容器内の気体の圧力が  $\alpha p_0$  に保たれるようにピストンに外力を加えたまま、熱制御装置を作動させ、ピストンの位置が  $z_D$  に達した時点で熱制御装置を停止した (図2の状態 D)。さらに、状態 D から容器内の気体の圧力が  $p_0$  となるまで、ピストンに加える外力を徐々に緩めながらゆっくり断熱変化させると、ピストンの位置が  $z = L$  となり、状態 A に戻った。

- 問4 過程  $C \rightarrow D \rightarrow A$  が実現するような  $z_D$  を  $\alpha, \gamma, L$  を用いて表せ。
- 問5 過程  $C \rightarrow D$  において、容器内の気体に加えられた熱量  $Q_2$  (気体が吸熱した場合を正、放熱した場合を負とする) を  $R, T_0, \alpha, \gamma$  を用いて表せ。
- 問6 この  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  のサイクルを用いた熱機関の熱効率  $e$  を  $\alpha, \gamma$  を用いて表せ。ただし  $e$  は、容器内の気体が熱制御装置から吸収した熱量に対する、気体が外部にした仕事の割合である。
- 問7  $e \geq \frac{1}{2}$  を達成するために必要となる  $\alpha$  の最小値  $\alpha_{min}$  を求めよ。ただし、単原子分子の理想気体においては、 $\gamma = \frac{5}{3}$  であることを用いよ。解答には根号が残っていてもよい。

B. 光速が慣性系の選び方によらないことを明らかにしたマイケルソン・モーリーの実験や、近年の重力波の観測は、互いに直交する2つの長い経路を通った光の干渉を用いて行われた。次の簡略化したモデルを用いて、光の干渉について考えよう。

図3に示すように、レーザー光源から出る光を、ハーフミラー(H)を用いて経路Xと経路Yの2つに分けた後、鏡で反射させ、Hによって、同じ面Fに集めた。ハーフミラーは、光の一部を透過し、残りを反射する鏡である。経路Yを通った光を面Fに垂直に入射させ(入射角 $0^\circ$ )、経路Xを通った光を十分に小さな入射角 $\theta$ で入射させた。その結果、2つの光が作る干渉縞が、面Fで観測された(図4)。レーザー光の経路は、指定がない限り、真空である。レーザー光の真空中での波長を $\lambda$ とする。また、経路Xの途中には、長さ $L$ の透明な容器Aが置かれていて、この容器内も最初は真空である。なお、レーザー光源に戻る光や面Fで反射する光は考えなくてよい。ハーフミラーHの厚みも無視してよい。レーザー光源は十分に幅の広い平面波を発生するものであり、面F付近で干渉を考える際も、平面波として取り扱ってよい。

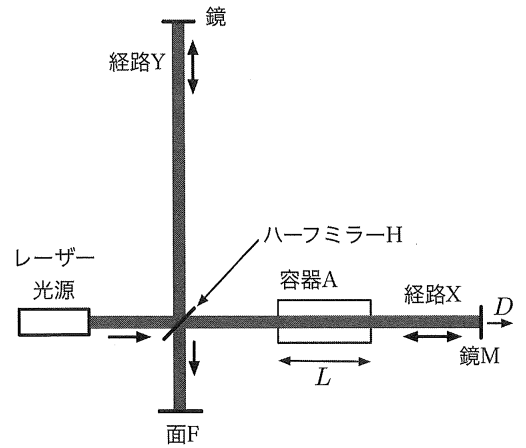


図3

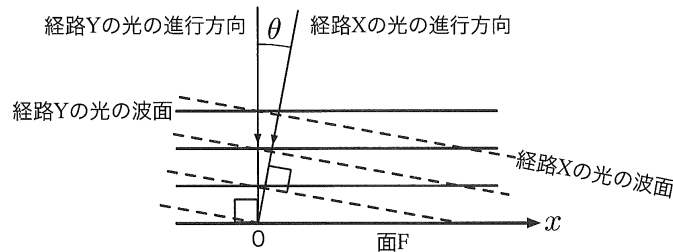


図4

問8 ある時刻に面Fに入射する波面の様子を拡大したところ、図4のようであった。なお図4では、 $\theta$ が誇張して大きく描かれている。面F上に図4のように $x$ 軸をとる。経路Xを通り $x=0$ に入射する光について、レーザー光源から測った光路長を $\ell$ とする。経路Xを通り面F上の任意の位置 $x$ こ入射する光の光路長を求めよ。ただし同じ波面上では、光源からの光路長は一定であるとせよ。

問9 面Fに作られた干渉縞の間隔(明線の間隔)を求めよ。

問10 干渉縞を観察しながら、経路Xの光を反射させる鏡Mを、ゆっくりと図3中の右方向に微小距離 $D$ 動かした。その結果、経路Xを通る光の光路長は $2D$ だけ伸び、干渉縞は $x$ 軸に沿って $\Delta x_1$ だけ動いた。 $\Delta x_1$ を符号も含めて答えよ。

問11 干渉縞を観察しながら、容器Aに微量のガスをゆっくりと入れ、容器A内の光の屈折率を $(1+\alpha)$ とした。ただし $\alpha$ は正で十分に小さい。ガスを入れたことによって、干渉縞は $x$ 軸に沿ってさらに $\Delta x_2$ 動いた。 $\Delta x_2$ を符号も含めて答えよ。ただし、ガスを入れたことによる経路の変化は無視してよい。

問12 光は電磁波の一種であり、その電場は正弦波で表すことができる。経路Xから面Fに入射する光の電場を $E_x$ 、同じく経路Yから入射する光の電場を $E_y$ とする。 $x=0$ において、 $E_x, E_y$ とも同じ向きで、 $E_0 \sin \omega t$ の時間変化をしていた。 $t$ は時刻である。 $\omega$ は光の波の角振動数であり、振動数 $f$ 、周期 $T$ と、 $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ の関係にある。なお $\omega$ は0でない定数である。

2つの光の干渉によって面F上に発生した干渉縞の明るさは $x$ の関数であり、「2つの光の電場の和の2乗の時間平均(十分に長い時間にわたる平均)」に比例する。この電場の和の2乗、すなわち $(E_x + E_y)^2$ の時間平均 $I(x)$ を求めよ。なお、0でない定数 $a$ 対し、 $\sin at$ や $\cos at$ の時間平均は0だが、 $\sin^2 at$ や $\cos^2 at$ の時間平均は $\frac{1}{2}$ であることを用いてよい。