No.

Date

337 (1) $(与式) = \sum_{k=1}^{n-1} k\cdot(n-k)$

$= \sum(-k^2+nk)$

$= -\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + \frac{n}{2}n(n-1)$

$= \frac{1}{6}n(n-1)\{3n-(2n-1)\}$

$= \frac{1}{6}n(n-1)(n+1)$

(2) $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ とすると

$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n}$ ①

$\frac{1}{2}S = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}$ ②

① − ② より

$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$

$\frac{1}{2}S = \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}}$

$S = 2(1-\frac{1}{2^n}) - \frac{n}{2^n}$

$= 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$

(3) $(与式) = \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{4k-3}+\sqrt{4k+1}}$

$= \sum_{k=1}^{12} \frac{\sqrt{4k+1}-\sqrt{4k-3}}{4k+1-(4k-3)}$

$= \frac{1}{4}\{(\sqrt{5}-\sqrt{1}) + (\sqrt{9}-\sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{49}-\sqrt{45})\}$

$= \frac{1}{4}\{\sqrt{49}-\sqrt{1}\}$

$= \frac{3}{2}$

(4) $(与式) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{k} j}\right)$

$= \sum_k \left(\frac{2}{k(k+1)}\right)$

$= \sum 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= 2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$= 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$= \frac{2n}{n+1}$

No.

Date ・ ・

338 ア)

i) $n=1$ のとき

$a_1 = S_1 = -2+15$

$\therefore a_1 = 13$

ii) $n \geqq 2$ のとき

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= -2n^2+15n - \{-2(n-1)^2+15(n-1)\}$

$= -2n^2+15n - (-2n^2+4n-2+15n-15)$

$= -4n+17$

i) ii) より すべての n に対して

$a_n = -4n+17$

イ) $n \leqq 4$ で $a_n > 0$

$n \geqq 5$ で $a_n < 0$ なので ⊛

$n=4$ のとき S_n は最大

$S_4 = -32+60 = 28$

ウ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} |a_n| = \sum_{n=1}^{4} a_n - \sum_{n=5}^{10} a_n$ （∵ ⊛）

$\displaystyle = \sum_{n=1}^{4} a_n - \left(\sum_{n=1}^{10} a_n - \sum_{n=1}^{4} a_n\right)$

$\displaystyle = 2\sum_{n=1}^{4} a_n - \sum_{n=1}^{10} a_n$

$\displaystyle = 2\cdot\sum_{n=1}^{4}(-4n+17) - \sum_{n=1}^{10}(-4n+17)$

$= -4\cdot4\cdot5 + 2\cdot17\cdot4 + 2\cdot10\cdot11 - 17\cdot10$

$= 8\times(17-10) + 10(22-17)$

$= 56+50$

$= 106$

No.

Date . .

339 数列を$\{a_n\}$とすると、$a_n=2n-1$

第n群のはじめの項を第b_n項とすると

i) $n \geqq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= 1 + \frac{n}{2}(n-1)$$

ii) $n=1$ のとき

$$b_1 = 1$$

i) ii) より すべてのnに対して $b_n = \frac{n}{2}(n-1)+1$

777は、$777=2n-1$

$n=389$　　第389項

777が第n群にあるとすると

$$b_n \leqq 389 < b_{n+1}$$

$$\frac{n}{2}(n-1)+1 \leqq 389 < \frac{n}{2}(n+1)+1$$

$$n(n-1) \leqq 786 < n(n+1)$$

$28 \times 27 < 786 < 28 \times 29$ なので

$$n=28$$

$$b_{28} = \frac{1}{2} \times 28 \times 27 + 1$$

$$= 379$$ なので

777は第28群の11番目

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 28 \\ \hline 216 \\ 54 \\ \hline 756 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \times 29 \\ \hline 252 \\ 56 \\ \hline 812 \end{array}$$

340 (1) $a_n = 1+(n-1)d$, $b_n = 3 \cdot r^{n-1}$ とする。(d, r: 定数で, $r>0$)

$$\begin{cases} a_2 + 2b_2 = 21 \\ a_4 + 2b_4 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+d+6 \cdot r = 21 \\ 1+3d+6 \cdot r^3 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3d + 18r = 60 \\ 3d + 6r^3 = 168 \end{cases}$$

2式を引いて $6r^3 - 18r = 108$

$$r^3 - 3r - 18 = 0$$

$$(r-3)(r^2+3r+6) = 0$$

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 0 & -3 & -18 & \lfloor 3 \\ & 3 & 9 & 18 & \\ 1 & 3 & 6 & & \end{array}$$

No.

Date . .

$r=3$, $d=2$

$\therefore a_n = 2n-1$, $b_n = 3^n$

(2) $S_n = 1\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{3^2} + 5\cdot\frac{1}{3^3} + \cdots + (2n-1)\cdot\frac{1}{3^n}$

$\frac{1}{3}S_n = \qquad 1\cdot\frac{1}{3^2} + 3\cdot\frac{1}{3^3} + \cdots + (2n-3)\cdot\frac{1}{3^n} + (2n-1)\cdot\frac{1}{3^{n+1}}$

2式引いて

$\frac{2}{3}S_n = \frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{3^2} + 2\cdot\frac{1}{3^3} + \cdots + 2\cdot\frac{1}{3^n} - (2n-1)\cdot\frac{1}{3^{n+1}}$

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{2n-1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}} - \frac{2n-1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} - \frac{2n-1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}$

$= 1 - \frac{1}{3^n}\left\{\frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{2n-1}{2}\right\}$

$= 1 - \frac{1}{3^n}(n+1)$

341 求める和をSとすると

$(1+2+\cdots+n)^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 + 2S$

$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2S$

$\left\{\frac{n}{2}(n+1)\right\}^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + 2S$

$2S = \frac{n}{12}(n+1)\{3n(n+1) - 2(2n+1)\}$

$2S = \frac{n}{12}(n+1)(3n^2-n-2)$

$S = \frac{n}{24}(n+1)(3n+2)(n-1)$

342 ア) $a_n = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}(n-1) = \frac{\pi}{3}n$

$a_{10} = \frac{\pi}{3}\times 10 = \frac{10}{3}\pi$

イ) $b_n = \sin\frac{n}{3}\pi$

$b_{n+6} = \sin\frac{n+6}{3}\pi = \frac{n}{3}\pi = b_n$

$\{b_n\}$は 周期 6の 数列.

$2018 = 336\times 6 + 2$ なので

$b_{2018} = b_2$

$= \sin\frac{2}{3}\pi$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

No.

Date

(7) $\sum_{k=1}^{2018} b_k = (b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6)\times 336 + b_1+b_2$

$= \quad 0 \quad + \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \sqrt{3}$

343 (1) $1 \mid 1, 3 \mid 1, 3, 5 \mid 1, 3, 5, 7 \mid 1, 3, 5, 7, 9 \mid 1, 1, \cdots$ と群に分ける.

n群のはじめの項を第b_n項とすると

i) $n \geqq 2$ のとき

$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k$

$= 1 + \frac{n}{2}(n-1)$

ii) $n=1$ のとき

$b_1 = 1$

i) ii) より 全てのnに対し $b_n = \frac{n}{2}(n-1)+1$

$\therefore b_{k+1} = \frac{k}{2}(k+1)+1$ 　　第$\left(\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}+1\right)$項

(2) 17は第9群から現れるので m回目の17は第$(9+m-1)$群にある.

∴求める項は $b_{8+m}+8 = \frac{1}{2}(m+8)(m+7)+9$

$= \frac{1}{2}m^2+\frac{15}{2}m+37$

$1, 3, 5, \cdots, 17$

+8項

(3) n群の中の項の和をT_nとすると

$T_n = \sum_{j=1}^{n}(2j-1)$

$= n(n+1)-n$

$= n^2$

求める和は $\sum_{j=1}^{k} T_j + 1 = \sum_{j=1}^{k} j^2 + 1$

$= \frac{k}{6}(k+1)(2k+1)+1$

(4) 最小のnがj群にあるとすると、明らかに$j \geqq 2$なので

$\sum_{k=1}^{j-1} T_k < 1300 < \sum_{k=1}^{j} T_k$

$j(j-1)(2j-1) < 7800 < j(j+1)(2j+1)$

$16\cdot 15\cdot 31 < 7800 < 16\cdot 17\cdot 33$

$j = 16$

$\sum_{k=1}^{15} T_k = \frac{15}{6}\cdot 16\cdot 31 = 1240$

最小のnは第16群のl番目とすると

$1240 + \sum_{k=1}^{l}(2k-1) > 1300$

$l(l+1) - l > 60$

$l^2 > 60$

最小のlは 8

∴最小のnは $b_{16} + 7$

$= \frac{16}{2}\times 15 + 1 + 7$

$= 128$