No.

Date

83 $\frac{x}{b-c} = \frac{y}{c-a} = \frac{z}{a-b} = k$ とすると

$$\begin{cases} x = k(b-c) \\ y = k(c-a) \\ z = k(a-b) \end{cases}$$

$ax+by+cz$

$= ak(b-c) + bk(c-a) + ck(a-b)$

$= k(ab-ac+bc-ab+ac-bc)$

$= 0$

成り立つ

84 (1) (右辺)−(左辺)

$= 2^{a+b}+1-2^a-2^b$

$= (2^a-1)(2^b-1)$

$\geqq 0 \quad (\because 2^a \geqq 1,\ 2^b \geqq 1)$

等号成立は $2^a=1$ or $2^b=1$

すなわち $a=0$ or $b=0$ のとき

(2) $a+b \geqq 0,\ c \geqq 0$ なので (1) より

$2^{(a+b)+c}+1 \geqq 2^{a+b}+2^c$ が成り立つ

$\therefore 2^{a+b+c}+2 = 2^{(a+b)+c}+1+1$

$\geqq 2^{a+b}+2^c+1$

$\geqq 2^a+2^b+2^c \quad (\because (1))$

等号成立は「$a+b=0$ or $c=0$」かつ「$a=0$ or $b=0$」

すなわち「a, b, c のうち少なくとも2つが0」

No.

Date

85 (左辺) > 0, (右辺) > 0 なので (左辺)^2 ≦ (右辺)^2 を示す.

$(\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2$

$= \frac{1}{3}(x+y+z) - \frac{1}{9}(x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx})$

$= \frac{1}{9}(2x+2y+2z-2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}-2\sqrt{zx})$

$= \frac{1}{9}\{(x-2\sqrt{xy}+y)+(y-2\sqrt{yz}+z)-(z-2\sqrt{zx}+x)\}$

$= \frac{1}{9}\{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2+(\sqrt{z}-\sqrt{x})^2\}$

$\geqq 0$

等号成立は $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ かつ $\sqrt{y}=\sqrt{z}$ かつ $\sqrt{z}=\sqrt{x}$

すなわち $x=y=z$ のとき

86 (左辺) > 0, (右辺) > 0 なので (左辺)^2 < (右辺)^2 を示す

$(\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2$

$= (b-c)^2 - (b-a)^2$

$= -2bc + c^2 + 2ab - a^2$

$= 2b(a-c) - (a+c)(a-c)$

$= (a-c)\{2b-(a+c)\}$ …… ①

ここで $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$ より

$b = \frac{2ac}{a+c}$ であるから

① $= (a-c)\left\{\frac{4ac}{a+c} - (a+c)\right\}$

$= \frac{a-c}{a+c}\{4ab-(a+c)^2\}$

$= \frac{c-a}{a+c}(a^2-2ac+c^2)$

$= \frac{c-a}{a+c}\cdot(a-c)^2$

> 0 $(\because\ 0<a<c)$

成り立つ

$b = 2\left(\frac{ab}{a+c}\right)$

$(\text{右辺}) - (\text{左辺})$

$= |b-c| - |b-a|$

$= c-b-b+a$ $(\because\ a<b<c)$

$= c+a-2b$

$= \cdots$ とすればよかった.

No.

Date

87

$$\left(9x+\frac{1}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)$$
$$=36xy+9+4+\frac{1}{xy}$$
$$=36xy+\frac{1}{xy}+13$$

$xy>0$、$\frac{1}{xy}>0$ なので 相加平均と相乗平均の関係より

$$36xy+\frac{1}{xy}\geqq 2\sqrt{36xy\cdot\frac{1}{xy}}$$
$$=12$$

$$\therefore \left(9x+\frac{1}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)\geqq 12+13=25$$

$\therefore$ ア)… 25

等号成立は $36xy=\frac{1}{xy}$ のとき

$$36x^2y^2=1$$
$$6xy=1 \quad (\because xy>0)$$
$xy=\frac{1}{6}$ のとき

88

i) $\frac{a}{2}+\frac{1}{a}-\sqrt{2}$

$$=\left(\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 \quad (\because a>0)$$
$$>0$$
$$\therefore \frac{a}{2}+\frac{1}{a}>\sqrt{2}$$

ii)

$$\sqrt{2}-\frac{a+2}{a+1}$$
$$=\frac{1}{a+1}\left(\sqrt{2}a+\sqrt{2}-a-2\right)$$
$$=\frac{1}{a+1}\left\{(\sqrt{2}-1)a+\sqrt{2}(1-\sqrt{2})\right\}$$
$$=\frac{1}{a+1}\cdot(\sqrt{2}-1)(a-\sqrt{2})$$
$$>0 \quad (\because a>\sqrt{2})$$
$$\therefore \sqrt{2}>\frac{a+2}{a+1}$$

i) ii) より $\frac{a+2}{a+1}<\sqrt{2}<\frac{a}{2}+\frac{1}{a}$

$a=2$ とすると

$$\frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \sqrt{2}$$
$$\shortparallel \quad \shortparallel \quad \shortparallel$$
$$1.33\cdots \quad 1.5 \quad 1.41\cdots$$

No.

Date

89 (1) (左辺)−(右辺)

$= 2a^4+2b^4-(a^4+ab^3+a^3b+b^4)$

$= a^4-a^3b-ab^3+b^4$

$=(a^3-b^3)(a-b)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a-b)$

$=(a-b)^2\left\{(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3}{4}b^2\right\} \geqq 0$

等号成立は $a=b$ のとき

(2) (左辺)−(右辺)

$=3(a^4+b^4+c^4)-(a^4+b^4+c^4+ab^3+ac^3+bc^3+ba^3+ca^3+cb^3)$

$=2a^4+2b^4+2c^4-ab^3-ac^3-bc^3-ba^3-ca^3-cb^3$

$=(a^4-a^3b-ab^3+b^4)+(b^4-b^3c-bc^3+c^4)+(c^4-c^3a-ca^3+a^4)$

$\geqq 0$ ($\because$ (1) の証明過程)

等号成立は $a=b$ かつ $b=c$ かつ $c=a$

すなわち $a=b=c$ のとき

90 (1) (左辺) $\geqq 0$, (右辺) $\geqq 0$ なので (左辺)$^2 \geqq$ (右辺)^2 を示す

(左辺)^2 − (右辺)^2

$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2$
$\quad -a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2-2abxy-2bcyz-2cazx$

$=(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)+(b^2y^2-2bcyz+c^2z^2)$
$\quad +(c^2x^2-2cazx+a^2z^2)$

$=(ay-bx)^2+(by-cz)^2+(cx-az)^2$

$\geqq 0$

等号成立は $ay=bx$ かつ $by=cz$ かつ $cx=az$ のとき

(2) (1)において $a\to\sqrt{2}a$, $b\to\sqrt{3}b$, $c\to\sqrt{5}c$,

$x\to\sqrt{2}$, $y\to\sqrt{3}$, $z\to\sqrt{5}$ を代入

$\sqrt{2a^2+3b^2+5c^2}\cdot\sqrt{2+3+5} \geqq |2a+3b+5c|$

両辺正なので 2乗して $10(2a^2+3b^2+5c^2) \geqq (2a+3b+5c)^2$

No.

Date

91

$$\begin{cases} a+b=c+d & ① \\ a^2+b^2=c^2+d^2 & ② \end{cases}$$

①を両辺2乗して　$a^2+2ab+b^2=c^2+2cd+d^2$

②より　$2ab=2cd$

$ab=cd$

①より　$b=c+d-a$　を代入して

$a(c+d-a)=cd$

$-a^2+ac+ad-cd=0$

$(a-c)(a-d)=0$

$a=c$ or $a=d$

i) $a=c$ のとき

①より　$b=d$

ii) $a=d$ のとき

①より　$b=c$

i) ii) より　$\begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$ or $\begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases}$

No.

Date

92 $a+b+c>0$ なので

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \frac{9}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqq 9$$

$$(\text{左辺}) = 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$$

$$= 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)$$

$a>0$, $b>0$, $c>0$ なので相加平均と相乗平均の関係より

$$\begin{cases} \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} = 2 \\ \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}} = 2 \\ \frac{c}{b}+\frac{b}{c} \geqq 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}} = 2 \end{cases}$$

$$\therefore (\text{左辺}) \geqq 3+2+2+2$$

$$= 9$$

等号成立は $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$ かつ $\frac{a}{c}=\frac{c}{a}$ かつ $\frac{c}{b}=\frac{b}{c}$

すなわち $a=b=c$ のとき